Комбинаторика. Перестановки, размещения, сочетания

Основные формулы:

Перестановки: $P_n = n!$

Перестановки с повторениями: $\bar{P}_n(k_1, \cdots, k_n) = \frac{n!}{k_1! \cdot \cdots \cdot k_n!}$

Размещения: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Размещения с повторениями: $\bar{A}_n^k = n^k$

Сочетания: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Сочетания с повторениями: $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Задачи на разбор:

1. (Перестановки) Сколькими способами 4 человека могут разместиться в четырехместном купе?
Решение: По схеме получаем: $n = 4,\ k = 4$, порядок важен (места в купе различны), нужно выбрать все объекты, повторений нет. Нужна формула подсчета перестановок.
Значит, число различных размещений 4 человек в четырехместном купе – это число всех перестановок из 4 элементов: $N = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ способа.
2. (Перестановки с повторениями) Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, 2 ладьи, 2 слонов и 2 коней) на первой линии шахматной доски?
Решение: По схеме получаем: $n = 8$, $k = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8$, порядок важен (места на доске различны), нужно выбрать все объекты, повторения есть (есть одинаковые фигуры). Нужна формула подсчета перестановок с повторениями.
Всего мест на первой линии 8, фигур расставляется также 8, из них 2 одинаковых встречаются три раза. По формуле числа перестановок с повторениями получаем: $\bar{P}_8(1,1,2,2,2) = \frac{8!}{1!1!2!2!2!} = 5040$.
3. (Размещения) Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин, сдвоенных уроков нет.
Решение: По схеме получаем: $n = 5,\ k = 11$, порядок важен (уроки идут по порядку), повторений нет. Нужна формула подсчета размещений.
Будем считать, что уроки в течение дня не повторяются. Тогда количество вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин определим по формуле размещений: $A_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = 55440.$
4. (Размещения с повторениями) Шифр сейфа состоит только из 6 цифр, которые должны набираться последовательно и могут повторяться. Чему в этом случае равно общее число всех возможных комбинаций шифра?
Решение: По схеме получаем: $n = 10,\ k = 6$, порядок важен (шифр набирается в строгом порядке), повторения есть (цифры могут повторяться). Нужна формула подсчета размещений с повторениями.
Считаем, что в шифр может входить любая из 10 цифр, всего 6 возможных позиций (длина шифра равна 6 цифрам). Подсчитаем общее число всех возможных комбинаций шифра. Первую цифру можно выбрать 10 способами, вторую – также 10 (цифры могут повторяться), и так далее для всех шести цифр шифра, то есть $N = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 = \bar{A}_{10}^6$.
5. (Сочетания) Сколькими способами можно вывезти со склада 10 ящиков на двух автомашинах, если на каждую автомашину грузят по 5 ящиков?

Решение: По схеме получаем: $n = 10$, $k = 5$, порядок не важен, повторений нет. Нужна формула подсчета сочетаний.

Выбрать 5 ящиков, которые будут погружены на первую машину, из 10 ящиков, можно $C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ способами (сочетания из 10 объектов по 5). Тогда остальные 5 ящиков автоматически погружаем и везем во второй машине. Итого получаем $N = 252$ способа.

6. (Сочетания с повторениями) В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить 12 открыток для поздравлений?

Решение: По схеме получаем: $n = 10$, $k = 12$, порядок не важен, повторения есть. Нужна формула подсчета сочетаний с повторениями.

Число способов купить 12 открыток равно числу выборок 12 из 10 элементов (видов открыток) без учета порядка с повторениями: $\bar{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12} = \frac{21!}{12!\cdot(21-12)!} = \frac{21!}{12!9!} = 293930$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. *(Задачка на повторение предыдущей темы)* Сколькими способами можно поставить на шахматной доске белого и чёрного короля так, чтобы они не били друг друга?

Решение: Если белого ставим в угол, то для белого есть 4 варианта, а для чёрного — по 60 на каждый вариант поставить белого.

Если белый у края, но не в углу, то для белого 24 варианта, для чёрного — по 58.

Если белый в серединке, то для белого — 36, для чёрного — по 55.

Всего способов: $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 240 + 1392 + 1980 = 3612$.

2. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске две различные фигуры? Три различные фигуры? Четыре различные фигуры?

Ответы: $64 \cdot 63 = 4032$; $64 \cdot 63 \cdot 62 = 249984$; $64 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 = 15249024$.

3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске две одинаковые фигуры? Три одинаковые фигуры? Четыре одинаковые фигуры?

Ответы: $\frac{64\cdot63}{2!} = 2016$; $\frac{64\cdot63\cdot62}{3!} = 41664$; $\frac{64\cdot63\cdot62\cdot61}{4!} = 635376$.

4. У Анфисы есть 12 разных цветных карандашей. Она хочет нарисовать два одинаковых кружка разных цветов. Сколькими способами она может выбрать эти цвета? Сколькими способами можно выбрать цвета, чтобы нарисовать три одинаковых кружка разных цветов?

Решение: $\frac{12\cdot11}{2!} = 66$ и $\frac{12\cdot11\cdot10}{3!} = 220$. Выбираем три разных цвета, а потом делим на перестановки.

5. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске три белые и четыре чёрные пешки?

Решение: Поставить белые — $\frac{64\cdot63\cdot62}{3!} = 41664$. Добавить чёрные — $\frac{61\cdot60\cdot59\cdot58}{4!} = 521855$. Потом перемножить — $41664 \cdot 521855 = 21342566720$.

Либо сразу расставить все так, будто они разные, а потом поделить на перестановки белых и перестановки чёрных (по действиям будет то же самое).

6. Сколько прямых можно провести через 12 точек так, чтобы каждая прямая проходила через две из этих точек, если никакие три точки не расположены на одной прямой?

Решение: Нам нужно выбрать две точки из 12. $\frac{12\cdot11}{2} = 66$.

Или. Через первую точку можно провести 11 прямых, через вторую — ещё 10, через третью — ещё 9 и т.д. Итого: $11 + 10 + 9 + \ldots + 1 + 0 = \frac{12\cdot11}{2} = 66$.

7. Сколько треугольников с вершинами в 12 точках можно построить, если никакие три точки не лежат на одной прямой?

Решение: Аналогично. Выбираем три точки. $\frac{12\cdot11\cdot10}{3!} = 220$.

8. Сколькими способами можно разбить 12 человек на две команды по 6 человек?

Решение: $\frac{12!}{6!\cdot 6!} = 924$ — количество способов выбрать тех, кто в первой команде. Остальные будут во второй.

Так как если поменять команды номерами, разбиение не изменится, нужно поделить ещё на 2.

Итого: $\frac{12!}{6!\cdot 6!\cdot 2} = \frac{924}{2} = 462$ способа.

Дополнительные задачи

1. Каждая буква в азбуке Морзе зашифрована последовательностью точек и тире.
   а)Сколько различных букв можно зашифровать, если использовать коды, содержащие ровно пять символов (точек и тире)?
   б)А если использовать коды, содержащие не более пяти символов?
2. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, учёного секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?
3. В кондитерском магазине продавалось четыре сорта пирожных: наполеоны, песочные, слоёные и эклеры. Сколькими способами можно купить семь пирожных?
4. В первой группе класса «А» первенства СССР по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются медали: золотые, серебряные и бронзовые. Сколькими способами они могут быть распределены? (Медали каждого вида получает только одна команда.)
5. В сборной России по хоккею 25 человек, а в сборной Канады — 24 человека. В начале встречи на лёд выходят по пять игроков от каждой команды. Сколькими способами можно составить список игроков этих двух сборных, которые выйдут на лёд в начале встречи? Списки с одинаковым набором игроков, отличающиеся только порядком записи, считаются одинаковыми.
6. В пассажирском поезде 17 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам 17 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?
7. а)Сколькими способами 28 одноклассников могут выстроиться в очередь в столовую?
   б) Как изменится это число, если двоих хулиганов из этого класса, Петю Иванова и Колю Васина, нельзя ставить друг за другом?
8. Сколькими способами можно выбрать 17 цветов для букета, если в продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы, ирисы, тюльпаны и васильки?
9. Во дворе росло 13 деревьев. К ним привязали бельевые верёвки так, что между каждыми двумя деревьями натянута ровно одна верёвка. Сколько всего натянули верёвок?
10. У Кощея Бессмертного есть 100 одинаковых слитков золота и 10 одинаковых по объёму сундуков. В каждый сундук помещается любое количество слитков, не превосходящее 100. Сколько у Кощея есть способов разложить золото по сундукам?