

Основные теоремы теории вероятностей

Маколкина Татьяна Викторовна,
учитель математики
МБОУ «Гимназия №123»

Барнаул 2025 г.

Теоретический материал

Событие – это результат испытания.

$$P(A)=m/n$$

Два события, которые в данных условиях могут происходить одновременно, называются **совместными**, а те, которые не могут происходить одновременно, - **несовместными**.

Достоверное событие $P(A)=1$

Невозможное событие $P(A)=0$

Противоположные события $P(A)+P(\bar{A})=1$

$$P(\bar{A})=1- P(A)$$

События являются **независимыми**, если вероятность наступления любого из них не зависит от появления остальных событий рассматриваемого множества событий.

Произведением двух событий A и B называют событие AB , состоящее в совместном появлении этих событий.

Вероятность события A , вычисленная при условии, что событие B произошло, называется **условной вероятностью** события A и обозначается $P(A|B)$.

Теорема 1. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Теорема 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Суммой событий A и B называется событие $C=A+B$, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B , т. е. в наступлении события A , или события B , или обоих этих событий вместе, если они совместны.

Теорема 3. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Теорема 4. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих двух событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Формула полной вероятности:

Пусть событие A может произойти вместе с одним из независимых событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ (гипотезы).

Обозначим через A/H_i событие - «событие A произошло вместе с H_i ». Тогда справедлива формула

$$P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) + \dots P(A/H_n) \cdot P(H_n)$$

Формула Байеса:

Пусть событие A может произойти вместе с одним из независимых событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ (гипотезы).

Обозначим через A/H_i событие - «событие A произошло вместе с H_i ». Если событие A уже произошло то вероятность событий может быть переоценена по формуле **Байеса**, формуле вероятности гипотез:

$$P(H_i / A) = \frac{P(A / H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)}$$

Формула Бернулли:

Пусть $P_n(k)$ — вероятность наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания. Тогда $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$,

где p — вероятность «успеха», а $q=1-p$ — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Задачи:

1. В классе 26 человек, среди них два близнеца – Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Решение

Пусть один из близнецов находится в некоторой группе.

Вместе с ним в группе окажутся 12 человек из 25 оставшихся одноклассников.

Вероятность того, что второй близнец окажется среди этих 12 человек, равна $P = \frac{12}{25} = 0,48$.

2. Из колоды в 36 карт последовательно извлекаются 2 карты. Найти вероятность того, что вторая карта окажется картой червей, если до этого:

- а) была извлечена карта червей;
- б) была извлечена карта другой масти.

Решение

Рассмотрим событие:

B – вторая карта будет червой.

а) A – сначала была извлечена карта червей.

Тогда в колоде осталось 35 карт, среди которых теперь находится 8 карт червовой масти.

$$P_A(B) = \frac{8}{35}$$

б) $\bar{A}$ – сначала была извлечена карта другой масти.

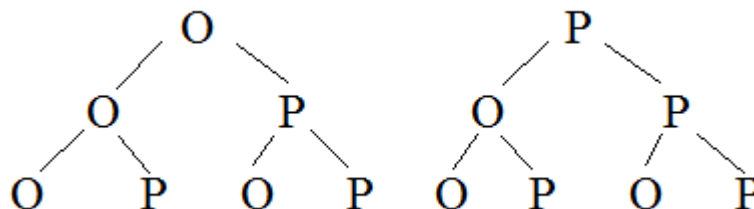
Тогда все 9 черв остались в колоде.

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{9}{35}$$

3. В случайном эксперименте монету бросили три раза. Какова вероятность того, что орел выпал ровно два раза.

Решение

Метод перебора исходов (вариантов)



Всего вариантов $n=8$

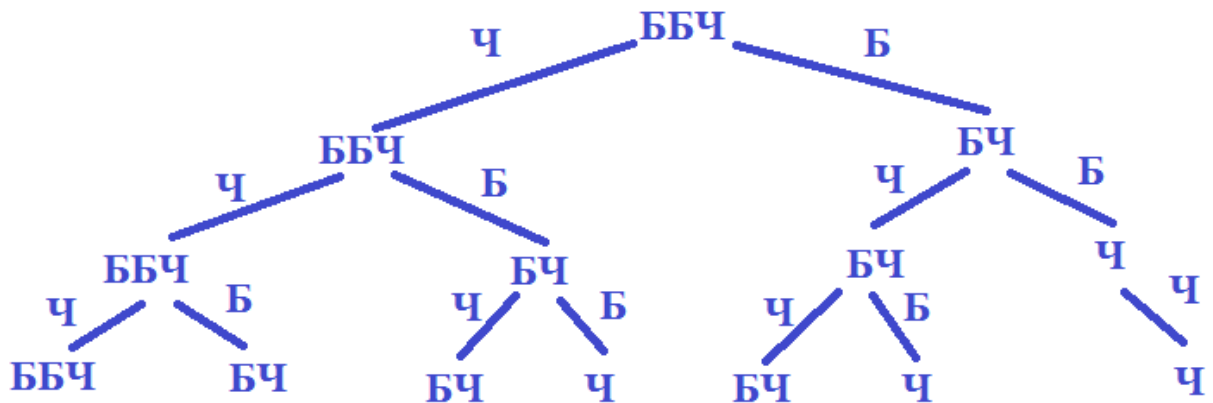
A – орел выпал ровно два раза.

$m=3$

$$P = \frac{3}{8} = 0,375$$

4. В закрытом ящике три неразличимых на ощупь шара: два белых и один чёрный. При вытаскивании чёрного шара, его возвращают обратно, а вытасканный белый шар откладывают в сторону. Такую операцию производят 3 раза подряд. Найти вероятность того, что: а) вынуты шары одного цвета; б) среди вытасканных шаров белых будет больше.

Решение



а) $m=1$

$$P=1/7$$

б) $m=3$

$$P=3/7$$

5. Игральную кость бросили дважды. Найти вероятность следующих событий: а) среди выпавших чисел нет ни одной пятерки; б) среди выпавших чисел есть или пятерка, или шестерка.

Решение

Множество элементарных исходов:

$$n=6*6=36$$

	1	2	3	4	5	6
1					*	
2					*	
3					*	
4					*	
5	*	*	*	*	*	*
6					*	

$$m=36-11=25$$

$$P=25/36$$

	1	2	3	4	5	6
1					*	*
2					*	*
3					*	*
4					*	*
5	*	*	*	*	*	*

6	*	*	*	*	*	*
---	---	---	---	---	---	---

$$m=20$$

$$P=20/36$$

6. В случайном эксперименте бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков.

Решение

Множество элементарных исходов:

$$n=6*6=36$$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$m=5$$

$$P = \frac{5}{36}$$

7. Даша дважды бросает игральный кубик. В сумме у нее выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 2 очка.

Решение

В сумме на двух кубиках должно выпасть 8 очков. Это возможно, если будут следующие комбинации:

2 и 6

6 и 2

3 и 5

5 и 3

4 и 4

Всего 5 вариантов. Подсчитаем количество исходов (вариантов), в которых при первом броске выпало 2 очка. Такой вариант 1.

Найдем вероятность:

$$P = \frac{1}{5} = 0,2.$$

8. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Решение

$$S=\{6, 7, 8, \dots\}$$

1 бросок

2 бросок

Итог

1	5,6	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{36}$
2	4,5,6	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 3 \cdot \frac{1}{36}$
3	3, 4,5,6	$4 \cdot \frac{1}{36}$
4	2, 3, 4,5,6	$5 \cdot \frac{1}{36}$
5	1,2,3,4,5,6	$6 \cdot \frac{1}{36}$
6	не подходит	

$$P = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{20}{36} = 0,83$$

9. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение

A – новый электрический чайник прослужит больше года.

$$P(A) = 0,98.$$

B – новый электрический чайник прослужит больше двух лет.

$$P(B) = 0,89.$$

C – новый электрический чайник прослужит меньше двух лет, но больше года.

$$A = B + C.$$

События B и C несовместны, значит,

$$P(A) = P(B) + P(C),$$

$$0,98 = 0,89 + P(C),$$

$$P(C) = 0,98 - 0,89 = 0,09$$

10. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

Решение

A – масса буханки меньше, чем 810 г.

$$P(A) = 0,97.$$

B – масса буханки больше, чем 790 г.

$$P(B) = 0,91.$$

$\bar{B}$ – масса буханки меньше, чем 790 г.

$$P(\bar{B}) = 1 - 0,91 = 0,09.$$

C – масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

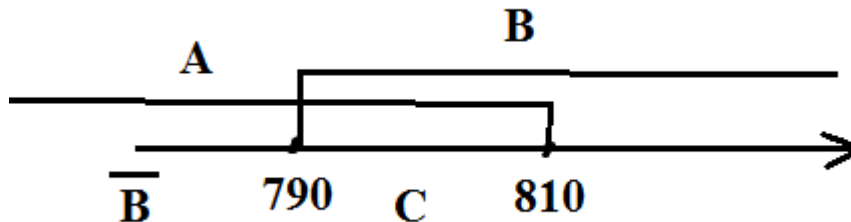
$$A = \bar{B} + C$$

События $\bar{B}$ и C несовместны, значит

$$P(\bar{B} + C) = P(\bar{B}) + P(C), \text{ т.е.}$$

$$P(A) = P(\bar{B}) + P(C)$$

$$P(C) = P(A) - P(\bar{B}) = 0,97 - 0,09 = 0,88$$



11. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение

A – кофе закончится в первом автомате.

B – кофе закончится во втором автомате

$$P(A) = P(B) = 0,4.$$

C – кофе закончится в обоих автоматах.

$$P(C) = 0,22.$$

События A и B совместны.

$A+B$ – закончится хотя бы в одном автомате.

По формуле сложения вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(C) = 0,4 + 0,4 - 0,22 = 0,58.$$

Противоположным событием будет:

D – кофе останется в обоих автоматах.

$$P(D) = 1 - P(A+B) = 1 - 0,58 = 0,42$$

12. В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Решение

Возможны два случая: сначала выбрали синий фломастер, потом красный, или сначала выбрали красный фломастер, потом синий.

Эти события несовместны, поэтому искомая вероятность равна:

$$P(C, K) + P(K, C) = \frac{8}{25} \cdot \frac{6}{24} + \frac{6}{25} \cdot \frac{8}{24} = \frac{2}{25} + \frac{2}{25} = \frac{4}{25} = 0,16.$$

13. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

Решение

Элементарными исходами здесь являются наборы, включающие 3 фрукта. Поскольку порядок фруктов безразличен, будем считать их выбор неупорядоченным (и бесповторным).

$$P(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{\frac{5!}{2!3!}}{\frac{9!}{3!6!}} = 0,12.$$

14. В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Решение

Чтобы пятирублевые монеты оказались в разных карманах, Петя должен взять из кармана одну пятирублевую и две десятирублевые монеты. Это можно сделать тремя способами:

5, 10, 10

10, 5, 10

10, 10, 5.

Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

15. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение

Вероятность наступления такой же погоды как вчера: 0,8.

Тогда вероятность наступления погоды, отличной от погоды, которая была вчера:

$$p = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта:

3	4	5	6
X	X	X	O
X	X	O	O

X O X O

X O O O

(здесь X – хорошая, O – отличная погода).

Найдем вероятности наступления такой погоды:

$$P(XXO) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128;$$

$$P(XOO) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,128;$$

$$P(OOO) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,128;$$

$$P(OXO) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008.$$

Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(XXO) + P(XOO) + P(OXO) + P(OOO) = 0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,128 = 0,392.$$

16. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку – 0,8, по иностранному языку – 0,7 и по обществознанию – 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение

Вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику:

$$P_1 = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,336.$$

Вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию:

$$P_2 = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,5 = 0,24.$$

Вероятность успешно сдать экзамены на обе специальности:

$$P_3 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,5 = 0,168.$$

Вероятность успешной сдачи хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей равна

$$P = P_1 + P_2 - P_3 = 0,408.$$

17. В эксперименте используются карточки белого и зеленого цветов, на которых изображены геометрические фигуры: квадрат или треугольник. Вероятность того, что на зеленой карточке изображен треугольник, равна 0,85. Для белой карточки эта вероятность равна 0,9. Найти вероятность того, что наудачу взятая карточка будет содержать треугольник, если в эксперименте используется одинаковое количество карточек зеленого и белого цветов

Решение

A – наудачу взятая карточка будет содержать треугольник.

H_1 – зеленая карточка.

H_2 – белая карточка.

Так как в эксперименте используется одинаковое количество карточек зеленого и белого цветов, то выбор карточки любого цвета равновозможен и соответствующая вероятность выбора равна 0,5 для каждого цвета.

$$P(H_1)=0,5$$

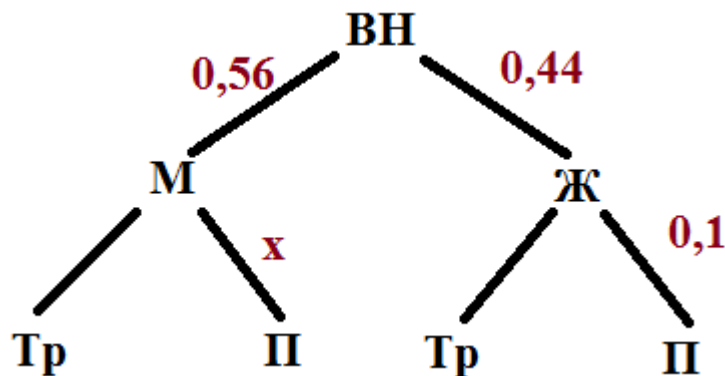
$$P(H_2)=0,5$$

$$P(A)=0,85 \cdot 0,5 + 0,9 \cdot 0,5 = 0,425 + 0,45 = 0,875$$

18. В городе 56 % взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,8 % взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 10 %. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Решение

Пусть x – доля мужчин пенсионеров среди всех мужчин. Построим дерево вероятностей:



A – пенсионеры среди взрослого населения. $P(A)=0,128$

$$P(A)=0,56 \cdot x + 0,44 \cdot 0,1$$

$$0,56 \cdot x + 0,44 \cdot 0,1 = 0,128$$

$$560x + 44 = 128$$

$$560x = 84$$

$$x = 0,15$$

19. Имеются три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 5 черных, во второй – 5 белых и 4 черных, в третьей – 6 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что: а) этот шар окажется белым, б) белый шар вынут из второй урны.

Решение

A – шар белого цвета.

Выбор любой из трех урн равновозможен:

H_1 – шар из 1-й урны. $P(H_1)=1/3$

H_2 – шар из 2-й урны. $P(H_2)=1/3$

H_3 – шар из 3-й урны. $P(H_3)=1/3$

$$P(A/H_1)=\frac{4}{9}$$

$$P(A/H_2)=\frac{5}{9}$$

$$P(A/H_3)=\frac{6}{6}=1$$

Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{4}{27}+\frac{5}{27}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Найдем вероятность того, что белый шар вынут из второй урны по формуле Байеса:

$$P(H_2/A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{18}$$

20. На двух станках обрабатываются одностипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, для станка № 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке № 1, вдвое больше, чем деталей, обработанных на станке № 2. Найти вероятность того, что наугад взятая стандартная деталь изготовлена на 1-м станке.

Решение

Пусть x – доля деталей, изготавливаемых на станке № 2, тогда доля изготавливаемых деталей на станке №1 – $2x$.

Тогда:

$$x+2x=1$$

$$x=\frac{1}{3}$$

Вероятность того, что деталь изготовлена первым станком:

$$P(H_1)=\frac{2}{3}.$$

Вероятность того, что деталь изготовлена вторым станком:

$$P(H_2)=\frac{1}{3}$$

Найдем вероятность того, что деталь будет стандартной:

$$P(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{97}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{98}{100}=\frac{194}{300}+\frac{98}{300}=\frac{292}{300}$$

Надем вероятность того, что наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке:

$$P(H_1 / A) = \frac{194}{300} : \frac{292}{300} = \frac{97}{146}$$

21. Петя бросает симметричную монету 26 раз. Во сколько раз вероятность события «решка выпадет ровно 7 раз» превосходит вероятность события «решка выпадет ровно 5 раз»?

Решение

Используем схему Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$n=26, p=0,5, q=0,5$$

Вероятность того, что решка выпадет 7 раз в серии испытаний из 26 бросков:

$$P_{26}(7) = C_{26}^7 \cdot 0,5^7 \cdot 0,5^{19} = \frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot 0,5^{26}$$

Вероятность того, что решка выпадет 5 раз в серии испытаний из 26 бросков:

$$P_{26}(5) = C_{26}^5 \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^{19} = \frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot 0,5^{26}$$

Находим искомое отношение:

$$\frac{\frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot 0,5^{26}}{\frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot 0,5^{26}} = \frac{5! \cdot 21!}{7! \cdot 19!} = \frac{20 \cdot 21}{6 \cdot 7} = 10.$$

22. Частица пролетает последовательно мимо 5 счетчиков. Каждый счетчик независимо от остальных отмечает ее пролёт с вероятностью 0,8. Частица считается зарегистрированной, если она отмечена не менее чем 2 счетчиками. Найти вероятность зарегистрировать частицу.

Решение

В данном случае:

$n = 5$ – общее количество счетчиков;

m – вероятное количество счетчиков, зарегистрировавших частицу;

$p=0,8$ – вероятность регистрации частицы для каждого счетчика;

$q=1-p=1-0,8=0,2$ – вероятность того, что частица не будет зарегистрирована;

По теореме сложения вероятностей несовместных событий найдем вероятность того, что частица будет отмечена менее чем двумя счетчиками (не зарегистрирована):

$$P_8(m < 2) = P_8(0) + P_8(1) = C_5^0 \cdot (0,8)^0 \cdot (0,2)^5 + C_5^1 \cdot (0,8)^1 \cdot (0,2)^4 = \\ = (0,2)^5 + 5 \cdot 0,8 \cdot (0,2)^4 = 0,00032 + 0,0064 = 0,00672$$

Найдём вероятность противоположного события – вероятность того, что частица будет отмечена не менее чем двумя счетчиками (частица зарегистрирована):

$$P_8(m \geq 2) = 1 - P_8(m < 2) = 1 - 0,00672 = 0,99328$$