

Основные теоремы теории вероятностей

Маколкина Татьяна Викторовна,
учитель математики
МБОУ «Гимназия №123»

Барнаул 2025 г.

Теоретический материал

Событие – это результат испытания.

$$P(A)=m/n$$

Два события, которые в данных условиях могут происходить одновременно, называются **совместными**, а те, которые не могут происходить одновременно, – **несовместными**.

Достоверное событие $P(A)=1$

Невозможное событие $P(A)=0$

Противоположные события $P(A)+P(\bar{A})=1$

$$P(\bar{A})=1- P(A)$$

События являются **независимыми**, если вероятность наступления любого из них не зависит от появления остальных событий рассматриваемого множества событий.

Произведением двух событий A и B называют событие AB , состоящее в совместном появлении этих событий.

Вероятность события A , вычисленная при условии, что событие B произошло, называется **условной вероятностью** события A и обозначается $P(A|B)$.

Теорема 1. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Теорема 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Суммой событий A и B называется событие $C=A+B$, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B , т. е. в наступлении события A , или события B , или обоих этих событий вместе, если они совместны.

Теорема 3. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Теорема 4. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих двух событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Формула полной вероятности:

Пусть событие A может произойти вместе с одним из независимых событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ (гипотезы). Обозначим через A/H_i событие – «событие A произошло вместе с H_i ». Тогда справедлива формула

$$P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) + \dots P(A/H_n) \cdot P(H_n)$$

Формула Байеса:

Пусть событие A может произойти вместе с одним из независимых событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ (гипотезы). Обозначим через A/H_i событие – «событие A произошло вместе с H_i ». Если событие A уже произошло то вероятность событий может быть переоценена по формуле **Байеса**, формуле вероятности гипотез:

$$P(H_i / A) = \frac{P(A / H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)}$$

Формула Бернулли:

Пусть $P_n(k)$ — вероятность наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания. Тогда $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$,

где p – вероятность «успеха», а $q=1-p$ – вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Задачи:

1. В классе 26 человек, среди них два близнеца – Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

2. Из колоды в 36 карт последовательно извлекаются 2 карты. Найти вероятность того, что вторая карта окажется картой червей, если до этого:

а) была извлечена карта червей;

б) была извлечена карта другой масти.

3. В случайном эксперименте монету бросили три раза. Какова вероятность того, что орел выпал ровно два раза.

4. В закрытом ящике три неразличимых на ощупь шара: два белых и один чёрный. При вытаскивании чёрного шара, его возвращают обратно, а вытащенный белый шар откладывают в сторону. Такую операцию производят 3 раза подряд. Найти вероятность того, что: а) вынуты шары одного цвета; б) среди вытащенных шаров белых будет больше.

5. Игральную кость бросили дважды. Найти вероятность следующих событий: а) среди выпавших чисел нет ни одной пятерки; б) среди выпавших чисел есть или пятерка, или шестерка.

6. В случайном эксперименте бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков.

7. Даша дважды бросает игральный кубик. В сумме у нее выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 2 очка.

8. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

9. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

10. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

11. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

12. В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

13. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбирают 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

14. В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

15. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

16. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку – 0,8, по иностранному языку – 0,7 и по обществознанию – 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

17. В эксперименте используются карточки белого и зеленого цветов, на которых изображены геометрические фигуры: квадрат или треугольник. Вероятность того, что на зеленой карточке изображен треугольник, равна 0,85. Для белой карточки эта вероятность равна 0,9. Найти вероятность того, что наудачу взятая карточка будет содержать треугольник, если в эксперименте используется одинаковое количество карточек зеленого и белого цветов

18. В городе 56 % взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,8 % взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 10 %. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

19. Имеются три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 5 черных, во второй – 5 белых и 4 черных, в третьей – 6 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что: а) этот шар окажется белым, б) белый шар вынут из второй урны.

20. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, для станка № 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке № 1, вдвое больше, чем деталей, обработанных на станке № 2. Найти вероятность того, что наугад взятая стандартная деталь изготовлена на 1-м станке.

21. Петя бросает симметричную монету 26 раз. Во сколько раз вероятность события «решка выпадет ровно 7 раз» превосходит вероятность события «решка выпадет ровно 5 раз»?

22. Частица пролетает последовательно мимо 5 счетчиков. Каждый счетчик независимо от остальных отмечает ее пролёт с вероятностью 0,8. Частица считается зарегистрированной, если она отмечена не менее чем 2 счетчиками. Найти вероятность зарегистрировать частицу.