

Сравнение по модулю

Определение.

Если два целых числа a и b при делении на m дают одинаковые остатки, то они называются сравнимыми по модулю числа m .

Сравнимость чисел a и b записывается в виде формулы (сравнения):

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Число m называется **модулем** сравнения.

Определение **сравнимости** чисел a и b по модулю m равносильно любому из следующих утверждений:

1. Разность чисел a и b делится на m без остатка; $a - b : m \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$
2. Число a может быть представлено в виде $a = b + km$, где k — некоторое целое число.

Свойства сравнения по модулю:

- рефлексивность: для любого целого a справедливо $a \equiv a \pmod{m}$
- симметричность: если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$
- транзитивность: если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$

Кроме вышеперечисленных свойств, для сравнений справедливы следующие утверждения:

- любые два целых числа сравнимы по модулю 1: $a \equiv b \pmod{1}$
- если числа a и b сравнимы по модулю m , и d является делителем m , то a и b сравнимы по модулю d : $a \equiv b \pmod{m}, m : d \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$

Операции со сравнениями:

1. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + c \pmod{m}$
2. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $ac \equiv bc \pmod{m}$, то
3. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
4. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a - c \equiv b - d \pmod{m}$
5. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$
6. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$
7. Если $ab \equiv 0 \pmod{m}$, и числа a и m взаимно просты, то $b \equiv 0 \pmod{m}$
8. Если $a \equiv b \pmod{m}$, $km \equiv 0 \pmod{m}$, то $a + km \equiv b \pmod{m}$; $a - km \equiv b \pmod{m}$

Задания:

1. Какие из следующих сравнений являются верными:
 $13 \equiv 37 \pmod{6}$; $-12 \equiv 3 \pmod{5}$; $14 \equiv 21 \pmod{3}$; $13 \equiv -5 \pmod{4}$; $13 \equiv 5 \pmod{4}$
2. Вместо звездочки запишите такое наименьшее неотрицательно целое число, чтобы полученное сравнение было верным:
 $56 \equiv * \pmod{8}$; $23 \equiv * \pmod{7}$; $-43 \equiv * \pmod{5}$; $-26 \equiv * \pmod{6}$;
 $* \equiv 3 \pmod{15}$; $* \equiv 6 \pmod{2}$; $* \equiv -2 \pmod{18}$; $* \equiv -3 \pmod{11}$.
3. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ значение выражения $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n}$ кратно 7;
4. Доказать, что а) $(61^{100} + 30^{99}) : 31$; б) $(43^{43} - 17^{17}) : 10$;
6. Найти остаток от деления а) 2^{2018} на 15; б) 521^{637} на 17;
в) $(75 \cdot 56)^{28} + (58 \cdot 34)^{31}$ на 19.
7. На какую цифру оканчивается число $9^{2015} + 7^{2016}$
8. Докажите, что число $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится а) на 999; б) на 1004.

Сравнение по модулю

Определение.

Если два целых числа a и b при делении на m дают одинаковые остатки, то они называются сравнимыми по модулю числа m .

Сравнимость чисел a и b записывается в виде формулы (сравнения):

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Число m называется **модулем сравнения**.

Определение **сравнимости** чисел a и b по модулю m равносильно любому из следующих утверждений:

1. Разность чисел a и b делится на m без остатка; $a - b : m \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$
2. Число a может быть представлено в виде $a = b + km$, где k — некоторое целое число.

Свойства сравнения по модулю:

- рефлексивность: для любого целого a справедливо $a \equiv a \pmod{m}$
- симметричность: если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$
- транзитивность: если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$

Кроме вышеперечисленных свойств, для сравнений справедливы следующие утверждения:

- любые два целых числа сравнимы по модулю 1: $a \equiv b \pmod{1}$
- если числа a и b сравнимы по модулю m , и d является делителем m , то a и b сравнимы по модулю d : $a \equiv b \pmod{m}, m : d \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$

Операции со сравнениями:

1. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + c \pmod{m}$
2. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $ac \equiv bc \pmod{m}$, то
3. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
4. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a - c \equiv b - d \pmod{m}$
5. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$
6. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$
7. Если $ab \equiv 0 \pmod{m}$, и числа a и m взаимно просты, то $b \equiv 0 \pmod{m}$
8. Если $a \equiv b \pmod{m}$, $km \equiv 0 \pmod{m}$, то $a + km \equiv b \pmod{m}$; $a - km \equiv b \pmod{m}$

Задания:

1. Какие из следующих сравнений являются верными:
 $13 \equiv 37 \pmod{6}$; $-12 \equiv 3 \pmod{5}$; $14 \equiv 21 \pmod{3}$; $13 \equiv -5 \pmod{4}$; $13 \equiv 5 \pmod{4}$
2. Вместо звездочки запишите такое наименьшее неотрицательно целое число, чтобы полученное сравнение было верным:
 $56 \equiv * \pmod{8}$; $23 \equiv * \pmod{7}$; $-43 \equiv * \pmod{5}$; $-26 \equiv * \pmod{6}$;
 $* \equiv 3 \pmod{15}$; $* \equiv 6 \pmod{2}$; $* \equiv -2 \pmod{18}$; $* \equiv -3 \pmod{11}$.
3. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ значение выражения $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n}$ кратно 7;
4. Доказать, что а) $(61^{100} + 30^{99}) : 31$; б) $(43^{43} - 17^{17}) : 10$;
6. Найти остаток от деления: а) 2^{2018} на 15; б) 521^{637} на 17;
в) $(75 \cdot 56)^{28} + (58 \cdot 34)^{31}$ на 19.
7. На какую цифру оканчивается число: а) $12^{2003} + 26^{2003} + 38^{2003}$; б)
8. Число 1001 выписали на доску 1001 раз подряд. Получили натуральное число a . Найдите остаток от деления a на 9999.

Дополнительные задания

1. Какие из следующих сравнений являются верными:

$$\begin{array}{lll} -7 \equiv 18 \pmod{5}; & 1 \equiv -6 \pmod{7}; & 17 \equiv 239 \pmod{19}; \\ 572 \equiv 0 \pmod{13}; & 21 \equiv -1 \pmod{4}; & 35 \equiv 27 \pmod{8}; \\ -14 \equiv 10 \pmod{6}; & 35 \equiv 25 \pmod{9}; & -5 \equiv 11 \pmod{8}. \end{array}$$

2. Вместо звездочки запишите такое наименьшее неотрицательно целое число, чтобы полученное сравнение было верным:

$$\begin{array}{lll} 84 \equiv * \pmod{9}; & 37 \equiv * \pmod{7}; & -65 \equiv * \pmod{9}; \\ -121 \equiv * \pmod{6}; & * \equiv 3 \pmod{13}; & * \equiv 7 \pmod{12}; \\ * \equiv -6 \pmod{22}; & * \equiv -5 \pmod{11}. \end{array}$$

3. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ значение выражения кратно b :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 4 \cdot 13^n + 37^n + 1, b = 6; & \text{б) } 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}, b = 23; \\ \text{в) } 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}, b = 37; & \text{г) } 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}, b = 17. \end{array}$$

4. Доказать, что

$$\text{а) } (10^{70} - 19^2) : 27; \text{ б) } (125^{44} + 44^{125}) : 9.$$

6. Найти остаток от деления

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 10^{100} \text{ на } 9; & \text{б) } 112^{10} \text{ на } 5; & \text{в) } (66 \cdot 50)^{17} + (32 \cdot 19)^{21} \text{ на } 17; \\ \text{г) } 1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 \text{ на } 1004; & & \\ \text{д) } 7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783 \text{ на } 7. & & \end{array}$$

7. На какую цифру оканчивается число

$$\text{а) } 1989^{1989}; \quad \text{б) } 12^{2003} + 26^{2003} + 38^{2003};$$

8. Число 1001 выписали на доску 1001 раз подряд. Получили натуральное число a . Найдите остаток от деления a на 9999.

9. На поле выросло 7^{23789} цветочков. Известно, что в этом поле правят 8 группировок пчел. Сколько еще цветочков должно вырасти, чтобы пчелы могли поделить их поровну и не развязали войну.

Дополнительные задания

1. -Какие из следующих сравнений являются верными:

$$\begin{array}{lll} -7 \equiv 18 \pmod{5}; & 1 \equiv -6 \pmod{7}; & 17 \equiv 239 \pmod{19}; \\ 572 \equiv 0 \pmod{13}; & 21 \equiv -1 \pmod{4}; & 35 \equiv 27 \pmod{8}; \\ -14 \equiv 10 \pmod{6}; & 35 \equiv 25 \pmod{9}; & -5 \equiv 11 \pmod{8}. \end{array}$$

2. Вместо звездочки запишите такое наименьшее неотрицательно целое число, чтобы полученное сравнение было верным:

$$\begin{array}{lll} 84 \equiv * \pmod{9}; & 37 \equiv * \pmod{7}; & -65 \equiv * \pmod{9}; \\ -121 \equiv * \pmod{6}; & * \equiv 3 \pmod{13}; & * \equiv 7 \pmod{12}; \\ * \equiv -6 \pmod{22}; & * \equiv -5 \pmod{11}. \end{array}$$

3. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ значение выражения кратно b :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 4 \cdot 13^n + 37^n + 1, b = 6; & \text{б) } 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}, b = 23; \\ \text{в) } 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}, b = 37; & \text{г) } 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}, b = 17. \end{array}$$

4. Доказать, что

$$\text{а) } (10^{70} - 19^2) : 27; \text{ б) } (125^{44} + 44^{125}) : 9.$$

6. Найти остаток от деления

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 10^{100} \text{ на } 9; & \text{б) } 112^{10} \text{ на } 5; & \text{в) } (66 \cdot 50)^{17} + (32 \cdot 19)^{21} \text{ на } 17; \\ \text{г) } 1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 \text{ на } 1004; & & \\ \text{д) } 7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783 \text{ на } 7. & & \end{array}$$

7. На какую цифру оканчивается число

$$\text{а) } 1989^{1989}; \quad \text{б) } 12^{2003} + 26^{2003} + 38^{2003};$$

8. Число 1001 выписали на доску 1001 раз подряд. Получили натуральное число a . Найдите остаток от деления a на 9999.

9. На поле выросло 7^{23789} цветочков. Известно, что в этом поле правят 8 группировок пчел. Сколько еще цветочков должно вырасти, чтобы пчелы могли поделить их поровну и не развязали войну.