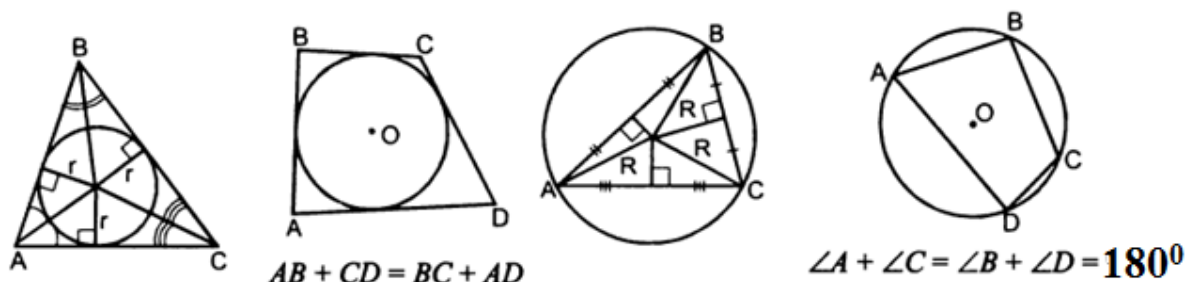
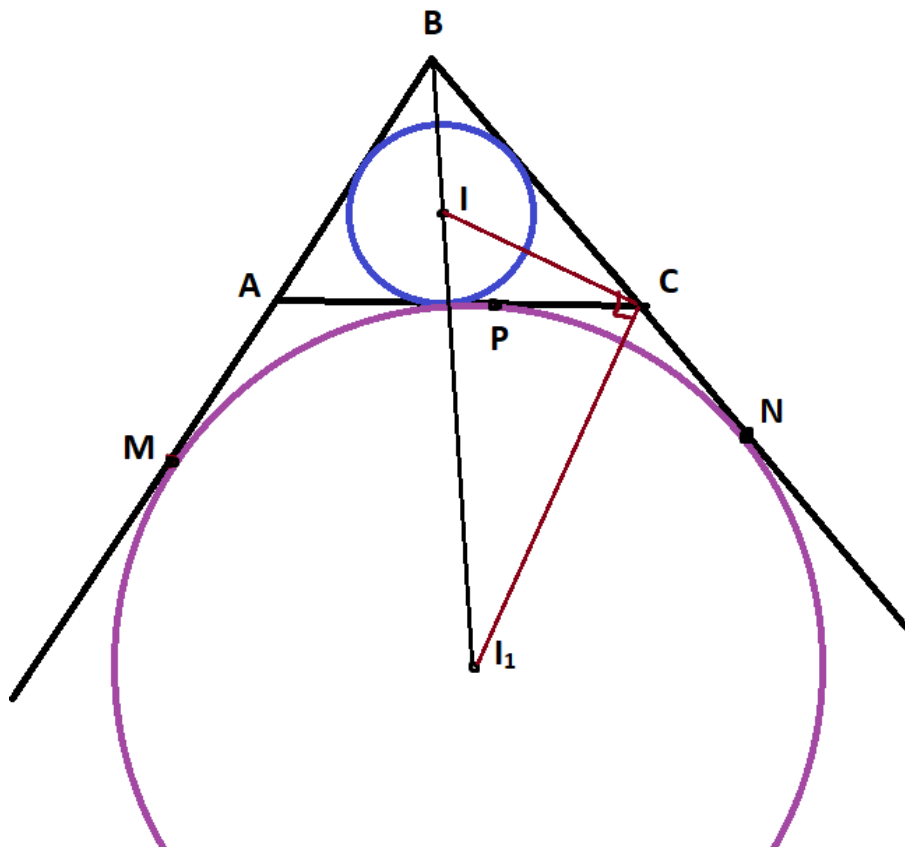


Вписанная и описанная окружности



1. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.
2. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AK = 14$, а сторона AC в 2 раза больше стороны BC .
3. Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K . Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK .
4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M , лежащей на основании AD . Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.
5. Точка B лежит на отрезке AC . Прямая, проходящая через точку A , касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K . Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D . Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
6. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведённые из точек B и C , продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1 . Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC .
7. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60° ; O - центр описанной окружности, I - инцентр, H - ортоцентр. Докажите, что точки A , O , I , H и C лежат на одной окружности.

Вневписанная окружность

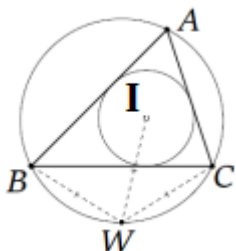


1. Точки I, I_1 лежат на биссектрисе $\angle B$.
2. $MA=AP, PC=CN, BM=BN$.
3. AI_1, CI_1 – биссектрисы внешних углов $\triangle ABC$.
4. $\angle IAI_1 = \angle ICI_1$
5. $MB = \frac{1}{2}P_{\triangle ABC}$

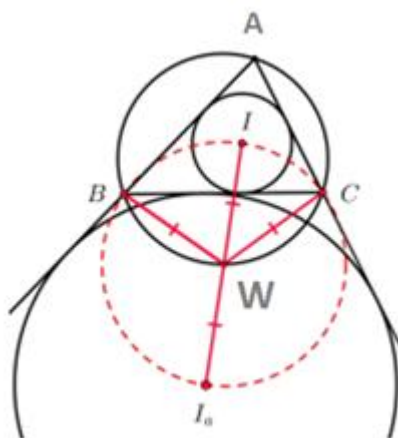
Практикум

1. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .
2. Найдите радиусы вписанной, описанной, вневписанных окружностей треугольника со сторонами 13, 13, 10.
3. Найдите периметр треугольника ABC , если расстояние от вершины A до точки касания с вневписанной окружностью равно 17, расстояние от вершины B до точки касания окружности со стороной BC равно 6, расстояние от вершины C до точки касания окружности со стороной AC равно 4.
4. Найдите радиус вневписанной окружности, если расстояние от вершины A до точки касания с окружностью равно 21, $BC=15$, $AB=14, AC=13$.

Лемма Мансиона (лемма о трезубце I). Докажите, что если продолжение биссектрисы угла A пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке W , то $WB=WC=WI$, где I – центр вписанной окружности, а I_a – центр внеписанной окружности, касающейся стороны BC .



Задача 2 (Теорема о куриной лапке). Середина меньшей дуги BC описанной окружности треугольника ABC равноудалена от точек B , C , центра вписанной окружности и центра внеписанной окружности, касающейся стороны BC .



Итак, точка W является:

- 1) серединой дуги BC описанной окружности треугольника ABC
- 2) центром окружности, описанной около треугольника BIC
- 3) точкой пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC и серединного перпендикуляра к стороне BC

4) центром окружности, описанной около четырёхугольника $BIC I_a$

Кроме того, получаем, что описанная окружность делит отрезок, соединяющий центры вписанной и внеписанной окружностей, пополам.

Задачи

1. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC , точка M – середина стороны AC , а точка W – середина не содержащей C дуги AB описанной окружности. Оказалось, что $\angle AIM = 90^\circ$. В каком отношении I делит отрезок CW ?

2. Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $BK = OK$. Докажите, что четырёхугольник $ABKC$ вписанный.

3. Точка I – центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Продолжение отрезка BI за точку I пересекает описанную окружность в точке D . Найдите $\angle B$, если $ID=4AC$.

4. Пусть A_0 и C_0 – середины дуг BC и AB описанной окружности треугольника ABC , не содержащих третьей вершины треугольника. Найдите угол B треугольника, у которого отрезок A_0C_0 касается вписанной окружности треугольника ABC .

5. Пусть точки A_1, B_1, C_1 – точки пересечения биссектрис углов A, B и C треугольника ABC соответственно с описанной около треугольника ABC окружностью. Докажите, что AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника $A_1B_1C_1$. (Двойное применение Леммы и использование свойства дельтоида)

6. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1 и B_1 . Вписанная окружность касается сторон AC и BC в точках A_2 и B_2 . Докажите, что A_1B_1 параллельна A_2B_2 . (Нужно увидеть «трезубец» в новой ситуации с применением признака параллельности прямых)

Дополнительные задачи

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $BC = CD$, $\angle BCA = 64^\circ$, $\angle ACD = 70^\circ$. На отрезке AC отмечена точка O такая, что $\angle ADO = 32^\circ$. Сколько градусов составляет угол BOC ? (Школьный этап 2021 «Сириус» группа 1, 11.5)

2. Постройте треугольник по центру описанной окружности O , центру вписанной окружности I и вершине C .

3. Окружность ω проходит через вершины B, C и центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Второй раз ω пересекает прямую AB в точке B_1 , а AC – в точке C_1 . Докажите, что длины отрезков BB_1 и CC_1 равны.

4. Пусть в треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 – середины дуг BC, CA, AB . Пусть M_A, M_B, M_C – середины отрезков, отсекаемых сторонами треугольника ABC на отрезках B_0C_0, A_0C_0, A_0B_0 . Докажите, что точки B_0, C_0, M_B, M_C лежат на одной окружности.

5. На дуге AB описанной окружности треугольника ABC , не содержащей точки C , отмечена точка M , а на дуге AC , не содержащей точки B , отмечена точка N . Оказалось, что прямая MN параллельна BC . Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACN равноудалены от середины дуги BAC .

6. Пусть A_0 – середина стороны BC треугольника ABC , а A' – точка касания с этой стороной вписанной окружности. Построим окружность с центром в точке A_0 и проходящую через A' . На других сторонах построим аналогичные окружности. Докажите, что если окружность касается описанной окружности в точке дуги BC , не содержащей A , то ещё одна из построенных окружностей касается описанной. (Всероссийская олимпиада, окружной этап, 2003, 10.3)

7. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . В треугольники ABC и ABD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна BC . (Московская устная олимпиада по геометрии, 2017, 8-9.2)

8. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведена высота AH . На сторонах AC и AB отмечены точки B_1 и C_1

соответственно, так, что HA – биссектриса угла B_1HC_1 и четырёхугольник BC_1B_1C – вписанный. Докажите, что B_1 и C_1 – основания высот треугольника ABC . (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2015, 8-9.6*)

9. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ стороны BC и CD равны. Окружность S с центром C касается отрезка BD . Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABD . Докажите, что прямая, проходящая через I параллельно AB , касается S .

10. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC , M , N – середины дуг ABC и BAC описанной окружности. Докажите, что точки M , I , N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $AC + BC = 3AB$. (*Олимпиада по геометрии имени И.Ф. Шарыгина, 2014, 9.6*)

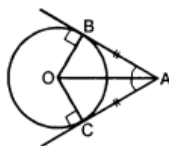
11. Треугольник ABC вписан в окружность S . Пусть A_0 – середина дуги BC окружности S , не содержащей точку A , C_0 – середина дуги окружности S , не содержащей точку C . Окружность S_1 с центром A_0 касается BC , окружность S_2 с центром C_0 касается AB . Докажите, что центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на одной из общих внешних касательных к окружностям S_1 и S_2 . (*Всероссийская олимпиада, финал, 1999, 9.3*)

12. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках X и Y соответственно. Точка K – середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC (не содержащей точки C). Оказалось, что прямая XY делит отрезок AK пополам. Чему может быть равен угол BAC ? (*Всероссийская олимпиада, финал, 2008, 9.6*)

13. Пусть ABC – остроугольный треугольник с центром I . Точка N – середина дуги BAC окружности, описанной около треугольника ABC . А точка P такая, что $ABPC$ является параллелограммом. Пусть точка Q – точка, симметричная точке A относительно N , а R – проекция A на QI . Докажите, что прямая AI касается окружности, описанной около треугольника PQR . (*7 Иранская геометрическая, 2020, Профессионалы – 11 класс*)

Свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки:

$$AB = AC, \angle BAO = \angle CAO$$



Углы в окружности

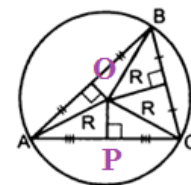
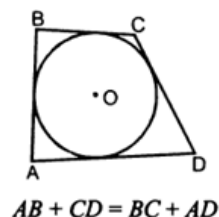
$\angle AOD$ – центральный. $\angle AOD = \angle AD$ $\angle ABD, \angle ACD$ – вписанные $\angle ABD = \angle ACD = 0,5 \angle AOD$	$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$
$\angle ABC = 0,5 \angle AC$	$\angle CAE = 0,5 (\angle CE - \angle BD)$ $\angle CKE = 0,5 (\angle CE + \angle BD)$

Свойства отрезков хорд, секущих и касательных

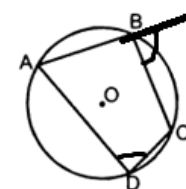
$AE \cdot BE = CE \cdot DE$	$AB^2 = AC \cdot AD$	$AB \cdot AC = AD \cdot AE$
---	--	---



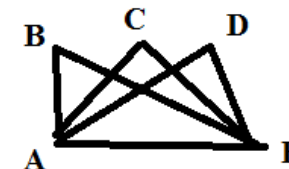
I - инцентр
лежит на
пересечении
биссектрис



O - центр опис.
окружности
(лежит на
пересечении
серединных
перпендикуляров



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$



$\angle B = \angle C = \angle D$
 опираются на AE

Тогда точки A, B, C, D, E -
лежат на одной окружности