Вероятностно-статистические задачи как мера усиления математической грамотности школьников

Маколкина Татьяна Викторовна,
учитель математики
МБОУ «Гимназия №123»

Барнаул 2024 г.

Теоретический материал

Событие – это результат испытания.

$P(A)=m/n$

Два события, которые в данных условиях могут происходить одновременно, называются **совместными**, а те, которые не могут происходить одновременно, - **несовместными**.

Достоверное событие $P(A)=1$

Невозможное событие $P(A)=0$

Противоположные события $P(A)+P(\bar{A})=1$

$P(\bar{A})=1- P(A)$

События являются **независимыми**, если вероятность наступления любого из них не зависит от появления остальных событий рассматриваемого множества событий.

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется **условной вероятностью** события A и обозначается $P(A|B)$.

Теорема 1. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Теорема 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Суммой событий A и B называется событие C=A+B, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B, т. е. в наступлении события A, или события B, или обоих этих событий вместе, если они совместны.

Теорема 3. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Теорема 4. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих двух событий без вероятности их совместного появления:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Примеры.

Зависимые и независимые события

Пример 1. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают последовательно без возвращения два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Пример 2. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,9. Найдите вероятность того, что он попадёт в цель три раза выстрела подряд.

Совместные и несовместные события

Пример 3. Вероятность того, что в магазине будет продана пара мужской обуви 44-го размера, равна 0,12; 45-го – 0,04; 46-го и большего – 0,01. Найти вероятность того, что будет продана пара мужской обуви не меньше 44-го размера.

Пример 4. Вероятность того, что в магазине будет продана пара мужской обуви 44-го размера, равна 0,12; 45-го – 0,04; 46-го и большего – 0,01. Найти вероятность того, что очередной будет продана пара обуви меньше 44-го размера.

Пример 5. В классе учится 20 человек, из которых 4 занимаются плаванием, 5 занимаются шахматами. Известно, что и плаванием и шахматами занимаются 2 ученика этого класса. Какова вероятность того, что выбранный наугад ученик этого класса занимается по крайней мере одним из этих видов спорта?

Задачи:

1. На олимпиаде в вузе участников рассаживают по трём аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчёте выяснилось, что всего было 250 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Решение

Всего в запасную аудиторию направили

$250 - 120 - 120 = 10$ человек.

Поэтому вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории, равна

$P=\frac{10}{250}=0,04.$

2. В классе 26 человек, среди них два близнеца – Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Решение

Пусть один из близнецов находится в некоторой группе.

Вместе с ним в группе окажутся 12 человек из 25 оставшихся одноклассников.

Вероятность того, что второй близнец окажется среди этих 12 человек, равна Р=$\frac{12}{25}=0{,}48$.

3. В коробке вперемешку лежат чайные пакетики с чёрным и зелёным чаем, одинаковые на вид, причём пакетиков с чёрным чаем в 19 раз больше, чем пакетиков с зелёным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный из этой коробки пакетик окажется пакетиком с зелёным чаем.

Решение

Пусть количество пакетиков с зеленым чаем равно х, тогда пакетиков с черным чаем 19х, а всего 20х.

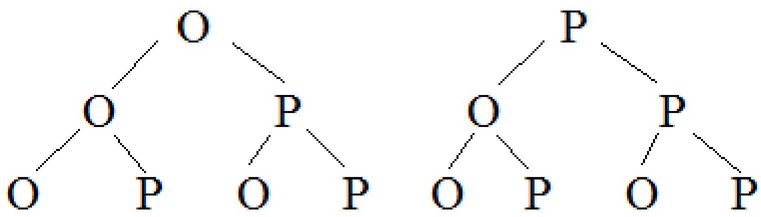
Значит, вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется пакетиком с зелёным чаем равно:

Р=$\frac{x}{20x}=0{,}05$.

4. В случайном эксперименте монету бросили три раза. Какова вероятность того, что орел выпал ровно два раза.

Решение

Метод перебора исходов (вариантов)



Всего вариантов n=8

А – орел выпал ровно два раза.

m=3

$P=\frac{3}{8}=0{,}375$

5. В случайном эксперименте бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков.

Решение

Множество элементарных исходов:

n=6*6=36

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	**8**
3	4	5	6	7	**8**	9
4	5	6	7	**8**	9	10
5	6	7	**8**	9	10	11
6	7	**8**	9	10	11	12

m=5

$$P = \frac{5}{36}$$

6. Даша дважды бросает игральный кубик. В сумме у нее выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 2 очка.

Решение

В сумме на двух кубиках должно выпасть 8 очков. Это возможно, если будут следующие комбинации:

2 и 6

6 и 2

3 и 5

5 и 3

4 и 4

Всего 5 вариантов. Подсчитаем количество исходов (вариантов), в которых при первом броске выпало 2 очка. Такой вариант 1.

Найдем вероятность:

$$P = \frac{1}{5} = 0{,}2 .$$

7. Тоша и Гоша играют в кости. Они бросают кубик по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Если очков выпало поровну, то наступает ничья. Первым бросил Тоша, у него выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Гоша не выиграет.

Решение

При условии, что у Тоши выпало 3 очка, возможны следующие варианты:

3 и 1

3 и 2

3 и 3

3 и 4

3 и 5

3 и 6

Всего 6 вариантов. Подсчитаем количество исходов, в которых Гоша не выиграет, т.е. наберет 1, 2 или 3 очка.

Таких вариантов 3.

Найдем вероятность: $P = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

8. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Решение

S={6, 7, 8,…}

1 бросок	**2 бросок**	**Итог**
1	5,6	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=2\cdot\frac{1}{36}$
2	4,5,6	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=3\cdot\frac{1}{36}$
3	3, 4,5,6	$4\cdot\frac{1}{36}$
4	2, 3, 4,5,6	$5\cdot\frac{1}{36}$
5	1,2,3,4,5,6	$6\cdot\frac{1}{36}$
6	не подходит	

P= $2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{1}{36}+4\cdot\frac{1}{36}+5\cdot\frac{1}{36}+6\cdot\frac{1}{36}=\frac{20}{36}=0{,}83$

9. В магазине стоят два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение

Здесь удобно сначала найти вероятность события «оба автомата неисправны», противоположного событию из условия задачи. Пусть

A – 1-ый автомат неисправен.

B – 2-ой автомат неисправен

По условию P(A) = P(B) = 0,05.

Событие «оба автомата неисправны» − это C=A∩B.

По формуле умножения вероятностей, его вероятность равна

P(C) = P(A)· P(B) = 0,05·0,05 = 0,0025.

Значит,

$P(\overline{C})=1-P(A)P(B)=1-0{,}0025\ =0{,}9975$

10. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение

А – новый электрический чайник прослужит больше года.

Р(А) = 0,98.

В – новый электрический чайник прослужит больше двух лет.

Р(В) = 0,89.

С – новый электрический чайник прослужит меньше двух лет, но больше года.

А = В + С.

События В и С несовместны, значит,

P(A) = P(B) + P(C),

0,98= 0,89+ P(C),

P(C) = 0,98-0,89=0,09

11. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

Решение

А – масса буханки меньше, чем 810 г.

P(A) = 0,97.

В – масса буханки больше, чем 790 г.

P(B) = 0,91.

$\overline{B}$ – масса буханки меньше, чем 790 г.

P($\overline{B}$) =1– 0,91=0,09.

С – масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

A= $\overline{B}$+C

События $\overline{B}$ и С несовместны, значит

P($\overline{B}$+C) = P($\overline{B}$) + P(C), т.е.

P(A) = P($\overline{B}$) + P(C)

P(C)= P(A) – P($\overline{B}$)= 0,97 – 0,09=0,88

12. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Решение

Команда может получить не меньше 4 очков в двух играх тремя способами: либо после двух выигрышей (3 + 3), либо после выигрыша и ничьей (3 + 1, 1 + 3).

Так как вероятность выигрыша и проигрыша равны 0,4, то вероятность ничьей равна 1 − 0,4 − 0,4 = 0,2.

А – команда выиграла оба матча.

P(A) = 0,4 · 0,4 = 0,16.

В – команда выиграла первый матч, закончила вничью второй матч.

P(B) = 0,4 · 0,2 = 0,08.

С –команда закончила вничью первый матч, выиграла второй матч.

P(B) = 0,2 · 0,4 = 0,08.

События А, В, С попарно несовместны, тогда

P(A+B+C) = P(A) +P(B) +P(C) = 0,16 + 0,08 + 0,08 = 0, 32.

13. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение

A – кофе закончится в первом автомате.

B – кофе закончится во втором автомате

P(A)=P(B)=0,4.

C – кофе закончится в обоих автоматах.

P(C)=0,22.

События A и B совместны.

A+B – закончится хотя бы в одном автомате.

По формуле сложения вероятностей:

P(A+B)=P(A)+P(B)–P(C)=0,4+0,4–0,22=0,58.

Противоположным событием будет:

D – кофе останется в обоих автоматах.

P(D)=1–P(A+B)=1–0,58=0,42

14. В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Решение

Чтобы пятирублевые монеты оказались в разных карманах, Петя должен взять из кармана одну пятирублевую и две десятирублевые монеты. Это можно сделать тремя способами:

5, 10, 10

10, 5, 10

10, 10, 5.

Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P = \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}=0{,}6\,.$$

15. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение

Вероятность наступления такой же погоды как вчера: 0,8.

Тогда вероятность наступления погоды, отличной от погоды, которая была вчера:

$p=1-0{,}8=0{,}2.$

Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта:

3	4	5	6
Х	Х	Х	О
Х	Х	О	О
Х	О	Х	О
Х	О	О	О

(здесь Х – хорошая, О – отличная погода).

Найдем вероятности наступления такой погоды:

P(ХХО) = $0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}128$;

P(ХОО) = $0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}128$;

P(ООО) = $0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}128$;

P(ОХО) = $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$.

Указанные события несовместные, вероятность их сумы равна сумме вероятностей этих событий:

P(ХХО) + P(ХОО) + P(ОХО) + P(ООО) =0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,128 =0,392.

16. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку – 0,8, по иностранному языку – 0,7 и по обществознанию – 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение

Вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику:

$P_1=0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7=0{,}336.$

Вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию:

$P_2=0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5=0{,}24.$

Вероятность успешно сдать экзамены на обе специальности:

$P_3=0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5=0{,}168.$

Вероятность успешной сдачи хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей равна

$P=P_1+P_2-P_3=0{,}408.$

17. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение

Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий:

А – батарейка действительно неисправна и забракована.

В – батарейка исправна, но по ошибке забракована.

Т. к. события «батарейка неисправна» и « батарейка забракована» независимы, значит, вероятность наступления события А равна:

$P(A) = 0{,}02 \cdot 0{,}99 = 0{,}0198$.

Исправную батарейку линия производит с вероятностью

$p=1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

Для отбраковки исправной батарейки должны произойти два независимых события: «линия произвела исправную батарейку» и «исправная батарейка забракована».

Значит, вероятность события В равна

$P(B) = 0{,}98 \cdot 0{,}01 = 0{,}0098$.

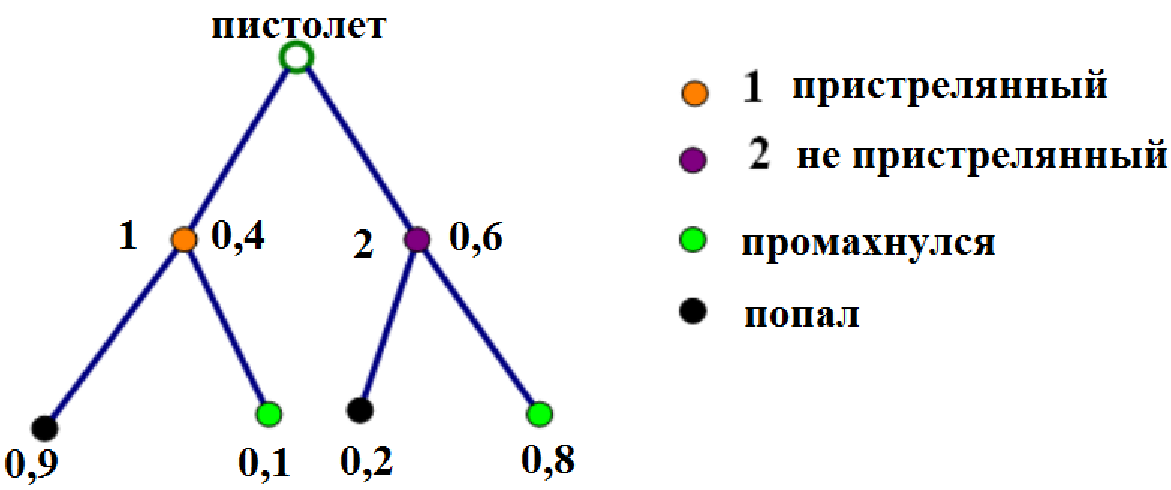
События А и В несовместны. Искомая вероятность равна

$P(A+B) = P(A) +P(B) = 0{,}0198 + 0{,}0098 = 0{,}0296$.

18. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из не пристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

Решение

А – Джон промахнулся при выстреле в муху.



P(A)=0,4·0,1+0,6·0,8=0,52

19. Петя бросает симметричную монету 26 раз. Во сколько раз вероятность события «решка выпадет ровно 7 раз» превосходит вероятность события «решка выпадет ровно 5 раз»?

Решение

Используем схему Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

n=26, p=0,5, q=0,5

Вероятность того, что решка выпадет 7 раз в серии испытаний из 26 бросков:

$$P_{26}(7) = C_{26}^7 \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5^{19} = \frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot 0{,}5^{26}$$

Вероятность того, что решка выпадет 5 раз в серии испытаний из 26 бросков:

$$P_{26}(5) = C_{26}^5 \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^{19} = \frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot 0{,}5^{26}$$

Находим искомое отношение:

$$\frac{\frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot 0{,}5^{26}}{\frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot 0{,}5^{26}} = \frac{5! \cdot 21!}{7! \cdot 19!} = \frac{20 \cdot 21}{6 \cdot 7} = 10.$$

20. Стрелок Алексей стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «Алексей поразит ровно 4 мишени» больше вероятности события «Алексей поразит ровно 3 мишени»?

Решение

Используем схему Бернулли:

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

n=5,

Вероятность того, что не попадет в цель за два выстрела:

q=0,4·0,4=0,16.

Вероятность того, что попадет в цель за два выстрела:

p=1–q=1–0,16=0,84

Вероятность того, что Алексей поразит 4 мишени:

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}84)^4 \cdot (0{,}16)^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot (0{,}84)^4 \cdot (0{,}16)^1 = 5 \cdot (0{,}84)^4 \cdot (0{,}16)^1$$

Вероятность того, что Алексей поразит 3 мишени:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}84)^3 \cdot (0{,}16)^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot (0{,}84)^3 \cdot (0{,}16)^2 = 10 \cdot (0{,}84)^3 \cdot (0{,}16)^2$$

Находим искомое отношение:

$$\frac{P_5(4)}{P_5(3)} = \frac{5 \cdot (0{,}84)^4 \cdot (0{,}16)^1}{10 \cdot (0{,}84)^3 \cdot (0{,}16)^2} = \frac{0{,}84}{2 \cdot 0{,}16} = 2{,}625$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая – 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, вторая – 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло является бракованным.

2. В городе 56 % взрослого населения — мужчины. Пенсионеры составляют 12,8 % взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 10 %. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

3. В каждой из восьми урн имеется 10 белых и 5 черных шаров. Из каждой урны извлекли по одному шару. Что вероятнее: появление двух черных и шести белых или трех черных и пяти белых шаров?

4. Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,5. Найти вероятность того, что при 8 выстрелах мишень будет поражена от 5 до 7 раз.

5. Для вычислительной лаборатории приобретено девять компьютеров, причем вероятность брака для одного компьютера равна 0,1. Какова вероятность, что придется заменить более двух компьютеров.

6. Частица пролетает последовательно мимо 5 счетчиков. Каждый счетчик независимо от остальных отмечает ее пролѐт с вероятностью 0,8. Частица считается зарегистрированной, если она отмечена не менее чем 2 счетчиками. Найти вероятность зарегистрировать частицу.

7. Игральную кость бросали один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

8. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 6. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.